ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen Final 02/12/2025

APELLIDO DEL ALUMNO: .... NOMBRE: ....

CORRIGIÓ: .... REVISÓ: ....

T1		T2		P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).
Su examen se mostrará una vez corregido.

T1) a. Demuestre que si $\vec{f}: R^2 \to R^2$ es un campo vectorial continuo y conservativo con función potencial φ y C es una curva abierta regular a trozos orientada desde el punto $\overrightarrow{x_1}$ a $\overrightarrow{x_2}$, entonces $\int_C \vec{f}.\overrightarrow{ds} = \varphi(\overrightarrow{x_2}) - \varphi(\overrightarrow{x_1})$

b. Calcule la circulación de $\vec{f}(x,y,z) = (2xe^{xy} + x^2ye^{xy}, x^3e^{xy} + 3y^2)$, a los largo de la curva abierta C con extremos en los puntos (1,0) y (0,2) orientada con sentido (1,0)→(0,2).

T2) a. Defina campo escalar f continuo en un punto (x_0, y_0)para el caso $f: R^2 \to R$.

b. ¿Es posible extender la función $f(x,y) = \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2\cos(x)}{(x-\frac{\pi}{2})^2+y^4}$ asignándole un valor en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, de modo que resulte continua en R^2? Fundamente la respuesta.

P1) Calcule el área de la superficie $z = x + y$ limitada lateralmente por la superficie de ecuación $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ y situada en el primer octante.

.

P2) Calcule la circulación del campo $\vec{f}$ a lo largo de la curva $C: \begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2=y \end{cases}$, si se sabe que $D\vec{f} = \begin{pmatrix} y & x & -2 \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$. Indique claramente en un gráfico el sentido elegido para recorrer la curva C.

P3) Sea $f: R^2 \to R \ / \ f(x,y) = x^2y + y^2 + 2y$. Determine todos los puntos (x_0, y_0) tales que el plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ sea paralelo al plano de ecuación $2y - \frac{z}{2} = 8$.

P4) Calcule el flujo del campo $\vec{f}: R^3 \to R^3 / \ \vec{f}(x,y,z) = (xy, x, xz)$ a través de la superficie abierta de ecuación $x^2 + y^2 = 2x \ con \ z \le 4 - x^2 - y^2$ en el primer octante. Indique gráficamente la orientación escogida la superficie.

(T1) a) Demostrar que si $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial continuo y conservativo con función potencial φ y C es una curva abierta regular a trozos orientada desde $\bar{X}_1$ a $\bar{X}_2$ entonces $\int_C \bar{F}\, d\bar{s} = \varphi(\bar{X}_2) - \varphi(\bar{X}_1)$

$\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2 \in \mathbb{R}^2$, $\bar{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\bar{F}$ es continuo y conservativo

$C: \bar{\gamma}_{(t)}$ $t \in [a,b]$ con $\begin{matrix}\bar{\gamma}_{(a)} = \bar{X}_1 \\ \bar{\gamma}_{(b)} = \bar{X}_2\end{matrix}$ $\Rightarrow \bar{F} = \nabla \varphi$

$$[\varphi(\bar{\gamma}_{(t)})]' = \nabla\varphi(\bar{\gamma}_{(t)}) \cdot \bar{\gamma}'_{(t)}\, dt$$

$\bar{F}$ conserv

$$\boxed{\int_C \bar{F}\, d\bar{s}} = \int_a^b \nabla\varphi(\bar{\gamma}_{(t)})\, \bar{\gamma}'_{(t)}\, dt = \varphi(\bar{\gamma}_{(t)})\Big|_a^b = \varphi(\bar{\gamma}_{(b)}) - \varphi(\bar{\gamma}_{(a)}) =$$

$$= \varphi(\bar{X}_2) - \varphi(\bar{X}_1)$$

$$\therefore \boxed{\int_C \bar{F}\, d\bar{s} = \varphi(\bar{X}_2) - \varphi(\bar{X}_1)}$$

NOTA

(1)

b) Calcular la circ. de $\bar{f}(x,y,\cancel{z}) = (\overbrace{2xe^{xy} + x^2 y e^{xy}}^{P}, \overbrace{x^3 e^{xy} + 3y^2}^{Q})$

a lo largo de la curva abierta C con extremos en los puntos $(1,0)$ y $(0,2)$ orientada $\underbrace{(1,0)}_{A} \to \underbrace{(0,2)}_{B}$

$\bar{F} \in C^1$ (componentes : suma algebraica de func. elementales)

$\bar{F} = (P,Q) \longrightarrow$ Analizo si $P'_y = Q'_x$

$\text{dom}(\bar{F}) = \mathbb{R}^2$ ✓

$P'_y = 2xe^{xy}\cdot x + x^2 e^{xy} + x^2 e^{xy} x$

$Q'_x = 3x^2 e^{xy} + x^3 e^{xy} y$

$P'_y = 3x^2 e^{xy} + x^3 e^{xy}$ $\Big\} =$ ✓

Es un campo conservativo $\Rightarrow \exists\, \varphi \,/\, \bar{F} = \bar{\nabla}\varphi$

$(P,Q) = (\varphi'_x, \varphi'_y)$

Hallo φ

$2xe^{xy} + x^2 y e^{xy} = \varphi'_x \xrightarrow[x]{\text{int}} \varphi(x,y) = x^2 e^{xy} + \alpha(y)$

$x^3 e^{xy} + 3y^2 = \varphi'_y \xrightarrow[\text{int. en } y]{} \varphi(x,y) = x^2 e^{xy} + y^3 + \beta(x)$

$$\boxed{\varphi(x,y) = x^2 e^{xy} + y^3 + c}$$

$$\int_C \bar{F}\, d\bar{l} = \int_a^b \bar{\nabla}\varphi(\bar{\sigma}(t))\, \bar{\sigma}'(t)\, dt = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(0,2) - \varphi(1,0) =$$

$$= 0 + 2^3 + \cancel{c} - 1 + 0 - \cancel{c} = 7$$

$$\boxed{\int_C \bar{F}\, d\bar{l} = 7}$$

NOTA

AM2	Final	HOJA N° 2/4 FECHA 2-12-25

(T2) a) Definir campo escalar f continuo en un punto (x_0,y_0) para el caso $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

f es continuo en (x_0,y_0) si:

- $\exists f(x_0,y_0)$ ✓
- $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$
- $f(x_0,y_0) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

b) ¿Es posible extender la función $f(x,y) = \dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + y^4}$ asignándole un valor en el punto $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ de modo que resulte continua en $\mathbb{R}^2$? Fundamentar

- $f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = a$

acotado entre 0 y 1

- $¿\exists \lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2},0\right)} f(x,y)?$ $\quad \lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2},0\right)} \dfrac{(x-\pi/2)^2 \overbrace{\cos(x)}^{\to 0}}{(x-\pi/2)^2+y^4} = 0$

$$0 \leq \frac{(x-\pi/2)^2}{(x-\pi/2)^2+y^4} \leq \frac{(x-\pi/2)^2}{(x-\pi/2)^2} = 1$$

$\boxed{\text{si } a=0 \quad f \text{ es continua en } \left(\frac{\pi}{2},0\right)}$

Para el resto de los puntos de $\mathbb{R}^2$, f es continua (división de funciones polinómicas y trigonométricas

NOTA

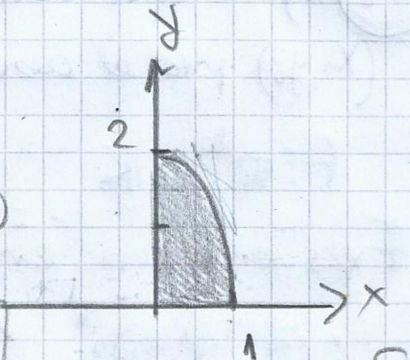
P1) Calcular el área de la Sup $\overbrace{z = x+y}^{S}$ limitada lateralmente por la sup. de ecuación $\underbrace{x^2 + \frac{y^2}{4} = 1}_{\text{elipse}}$ y situada en el primer octante

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

$\hookrightarrow a = 1 \rightarrow b = 2$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = 2r\,\text{sen}(t) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 1 \end{matrix}}$$



$S: x + y - z = 0$

$\hookrightarrow N = (1, 1, -1) \rightarrow \|N\| = \overbrace{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}^{\sqrt{3}}$

$$A_S = \iint_S dS = \iint_{S_{xy}} \|N\|\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} \sqrt{3}\, dx\,dy = \sqrt{3}\underbrace{\boxed{\iint_{S_{xy}} dx\,dy}}_{\text{Área}_{S_{xy}}}$$

$$\frac{ab\pi}{4}$$

$$A_S = \sqrt{3} \cdot \frac{1 \times 2}{4}\pi$$

$$\boxed{A_S = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$$

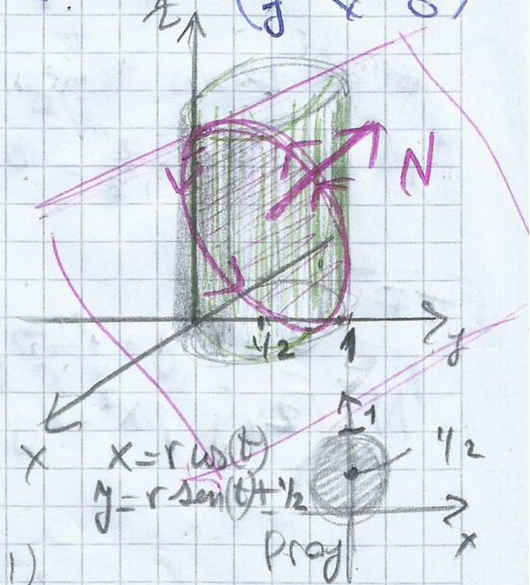
$$A_S = \sqrt{3}\iint_{S_{xy}} dx\,dy \overset{c.v}{=} \sqrt{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \underbrace{2r}_{\text{Jacob. elipse } abr}\, dr\,dt = \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\Big|_0^1 dt = \sqrt{3}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{A_S = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$$

AM2	Final	HOJA Nº 3 | 4 — FECHA 2-12-25

P2) Calcular la circ. del campo $\bar{f}$ a lo largo de la curva $C: \begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2=y \end{cases}$ si se sabe que $D\bar{f} = \begin{pmatrix} y & x & -2 \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$

Indicar el sentido elegido para C



$C: \begin{cases} \boxed{x+y+z=2 \Rightarrow \text{plano}} \\ x^2+y^2=y \Rightarrow \underbrace{x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}}_{\text{cilindro desplazado}} \end{cases}$

curva cerrada suave

S porción del plano cuyo borde es C

$\bar{f} \in C^1 \; (Df \in C^\infty)$ $\quad \to N = (1,1,1)$

Se cumplen las hipótesis del T. Stokes $\Rightarrow \oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \iint_S \operatorname{rot}(\bar{f})\, d\bar{s}$

$\operatorname{rot}(\bar{f}) = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y) = (x-x, -2-y, z-x)$

$D\bar{f} = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & -2 \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \boxed{\operatorname{rot}(\bar{f}) = (0, -2-y, z-x)}$

$\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \iint_{S_{xy}} \operatorname{rot}(\bar{f})\, N\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} (0, -2-y, z-x)(1,1,1)\, dx\,dy =$

$z = 2-x-y$

$= \iint_{S_{xy}} -2-y+z-x\, dx\,dy = \iint_{S_{xy}} \underbrace{-\cancel{2}-y+\cancel{2}-x-y-x}_{-2x-2y}\, dx\,dy =$

$= -2\iint_{S_{xy}} x+y\, dx\,dy = -2\underbrace{\iint_{S_{xy}} x\, dx\,dy}_{0 \text{ x la simetría}} - 2\iint_{S_{xy}} y\, dx\,dy =$

$= -2\iint_{S_{xy}} y\, dx\,dy \overset{\text{C.V.}}{=} -2\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} r\,(r\,\text{sen}(t)+1/2) =$

$= \underbrace{-2\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} r^2\,\text{sen}(t)\,dr\,dt}_{0} - 2\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} \frac{r}{2}\,dr\,dt}_{\text{área}} = -\pi\frac{1}{4}$ $\quad \boxed{\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \frac{-\pi}{4}}$

NOTA

(P3) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y) = x^2 y + y^2 + 2y$. Determinar todos los puntos (x_0, y_0) tales que el plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ sea paralelo al plano de ecuación $2y - \frac{z}{2} = 8$ π

Si el plano tangente a la gráfica de f es paralelo al plano $2y - \frac{z}{2} = 8 \Rightarrow$ $\underbrace{\text{Sus Normales son paralelas}}$

$$N_{PT} \,/\!/\, N_{\pi}$$

TFI

$$z = x^2 y + y^2 + 2y$$

$$N_{PT} = (2xy \,;\, x^2 + 2y + 2, -1)$$

$$\pi: 4y - z = 16$$

$$N = (0, 4, -1)$$

$$N_{PT} = k\, N_{\pi}$$

$$(2xy, x^2+2y+2, -1) = k\,(0,4,-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \longrightarrow x = 0 \lor y = 0 \\ x^2 + 2y + 2 = 4k \quad x^2 + 2y + 2 = 4 \\ -1 = -k \rightarrow \boxed{k = 1} \end{cases}$$

$$\boxed{x = 0} \rightarrow 0^2 + 2y + 2 = 4 \rightarrow y + 1 = 2 \Rightarrow y =$$

$$\boxed{P_1 = (0, 1)}$$

$$\boxed{y = 0} \rightarrow x^2 + 0 + 2 = 4 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow |x| = \sqrt{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P_2 = (\sqrt{2}, 0) \\ P_3 = (-\sqrt{2}, 0) \end{array}}$$

NOTA

AM 2	Final	HOJA N° 4/4 FECHA 2-12-25

P4 Calcular el flujo del campo $\bar{f}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / \bar{f}_{(x,y,z)} = (xy, x, xz)$ a través de la sup. abierta de ec. $x^2+y^2 = 2x$ con $z \leq 4-x^2-y^2$ en el 1° octante. Indicar ~~el sentido~~ orientación elegida

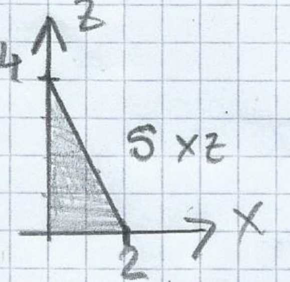
No conviene usar Gauss

$S: x^2+y^2-2x=0$ como no tiene componente z voy a proyectar en xz $\to G'_y$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2x \\ z = 4-(x^2+y^2) \end{cases} \to \boxed{z = 4-2x}$$

$$N = \left(\frac{2x-2}{2y}, \frac{2y}{2y}, 0\right)$$

$$\boxed{N = \left(\frac{x-1}{y}, 1, 0\right)}$$



$0 \leq x \leq 2$

$0 \leq z \leq 4-2x$

$$\iint_S \bar{f}\,d\bar{s} = \iint_{S_{xz}} \bar{f} \cdot N \, dx\,dz = \iint_{S_{xz}} (xy, x, xz)\left(\frac{x-1}{y}, 1, 0\right) dx\,dz =$$

$$= \iint_{S_{xz}} \frac{x\cancel{y}(x-1)}{\cancel{y}} + x \; dx\,dz = \iint_{S_{xz}} x^2 \cancel{-x} \cancel{+x} \; dx\,dz =$$

$$= \iint_{S_{xz}} x^2 \, dx\,dz = \int_0^2 \int_0^{4-2x} x^2 \, dz\,dx = \int_0^2 x^2 z \Big|_0^{4-2x} dx =$$

$$= \int_0^2 x^2(4-2x)\,dx = \frac{8}{3}$$

$$\boxed{\iint_S \bar{f}\,d\bar{s} = \frac{8}{3}}$$

NOTA